CONJUNTOS DIFUSOS –JHS

1.- INTRODUCCION

La lógica “fuzzy”, difusa, borrosa, nebulosa, …, fue expuesta por Lofti Zadeh (USA) en 1965 para modelar la manera en que las personas resuelven sus problemas cotidianos y para tomar decisiones en situaciones complejas.
En general, las personas usan variables lingüísticas para denotar valores y dar respuestas.

Algunos ejemplos son:

1. A es bastante más alto que B. Variable: estatura. “Bastante y más” son difusos.
   En un enfoque concreto, A podría tener una estatura de 1,80 [m] y B una de 1,65[m].

2. El automóvil viene muy rápidamente pero el autobús demasiado lento (en vez de: “el bus viene a 40 [Km/Hr] y el automóvil a 70 [Km/Hr]”)

3. Sea un peatón que desea cruzar una calle de ancho *a*, con velocidad *v*, o sea en un tiempo $t_1 = a/v$. Viene un vehículo a una distancia b con velocidad u. Así, demorará $t_2 = b/u$ en llegar al punto de cruce.
   El peatón decide cruzar si t_1 es menor que t_2, dejando un margen de seguridad Δt. Pero, naturalmente, el peatón no formula ese modelo matemático, del que, de todos modos, no conoce ninguno de los valores $\{ a, b, v, u, t_1,\ t_2, \Delta t \}$. Decide en forma “fuzzy” cruzar o no cruzar, esperando no equivocarse.

4. Sea controlar un estanque proceso, máquina o sistema cualquiera. Se podrían establecer modelos matemáticos y aplicar métodos de control sofisticados pero, si ellos no son conocidos o fáciles, se puede usar control “fuzzy” (Mandami, 1974, UK), con reglas IF.. THEN (SI...ENTONCES) tales como:
   “Si el nivel es excesivo y está creciendo rápidamente, cerrar la válvula de admisión rápidamente”.

2.- CONJUNTOS USUALES O NITIDOS O “CRISPS”

En los conjuntos usuales (G. Cantor) la función característica tiene valor 0 o 1, o sea, es binaria.
Sea A={a, b} un conjunto definido en un universo U= {a, b, c}. Entonces, a y b pertenecen a A, con función característica 1, y c pertenece al complemento $\overline{\mathrm{A}}$ de A, en el universo U.

3.- CONJUNTOS DIFUSOS (FS)

En los conjuntos difusos la función característica puede tener infinitos valores y es llamada función de pertenencia, designada por μ, . Ver figuras 1 y 2.

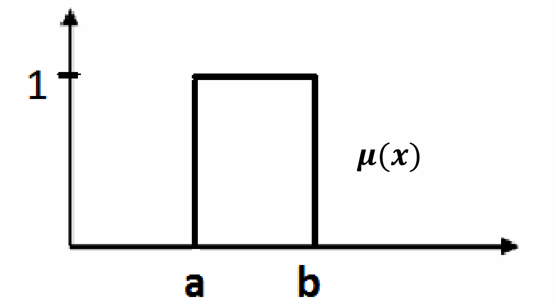


Figura 1: Pertenencia nítida

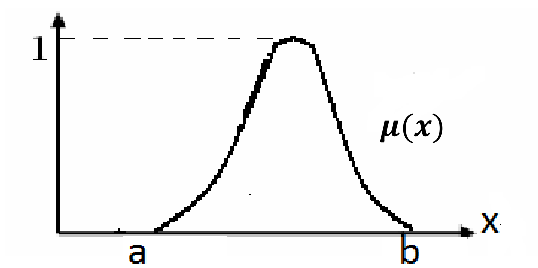


Figura 2: Pertenencia Difusa

Un conjunto difuso FS (fuzzy set) es definido como:

$$A = \{x, \mu_A(x)\}$$

Consta de elementos x y sus respectivos grados de pertenencia al conjunto. Otra ilustración es la de la figura 3.

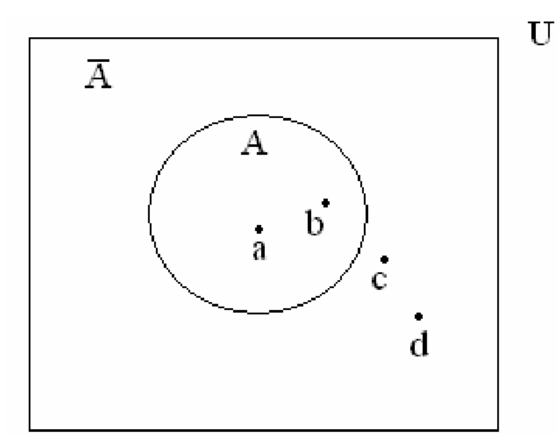


Figura 3: Conjunto A nítido o difuso

En la figura $A \subset U$, donde U es el "universo de discurso" que incluye la totalidad de los elementos de interés.

Si A es u conjunto usual, "crisp" o nítido, los elementos a y b pertenecen a A, y c y d pertenecen a $\overline{A}$, el complemento de A.

Si A es difuso el elemento *a* pertenece a A más que el elemento *b*. asimismo el elemento *c* no pertenece a A, menos que el elemento *d*. O bien, d pertenece más a $\overline{A}$ que *c*.

Los elementos b, c, difusos están en pertenencia difusa a A si consideramos que el límite, o frontera entre A y A' es incierto. "Fuzzy" es piloso, velloso, lanoso, impreciso...

BREVE HISTORIA.

Platón aceptaba que ciertos eventos pueden no ser necesariamente verdaderos (V) o falsos (F), Aristóteles, su discípulo, solo aceptaba que un evento es ya sea V o F.

El criterio binario (V, F) aristoteliano primó durante siglos, como en la lógica de Boole, por ejemplo.

Lukasiewicz (Polonia, 1900) propugnó la lógica ternaria, reafirmada en cierto modo por Knuth (USA).

En 1965, L.Zadeh, como se mencionó, introdujo la lógica fuzzy, y Mandami (1974) la aplicó en control automático.

La lógica y control difuso no prendieron en USA y Europa, al principio, pero fueron adaptados con gran intensidad y vastedad en Japón.

Las aplicaciones son muy vastas en control de: aguas, trenes, metros, grúas, elevadores, ascensores, reactores, vehículos, túneles, cámaras fotográficas, acondicionadores de aire, lavadoras, ollas, hornos diversos, helicópteros, y muchos otros.

INCERTEZAS, INCERTIDUMBRES

Pueden ser objetivas, usualmente tratadas con probabilidades, o subjetivas (lingüísticas), comúnmente tratadas con lógica difusa.

Imprecisión generalidad, vaguedad, ambigüedad son vocablos generalmente asociados con lógica difusa.

PERTENENCIA

La función de pertenencia es subjetiva, pero no arbitraria, y depende del contexto del tema o problema.

Como ejemplo, sea A el conjunto de personas altas en estatura. Se puede adoptar un $\mu_A(x)$ de la forma de la figura 4.

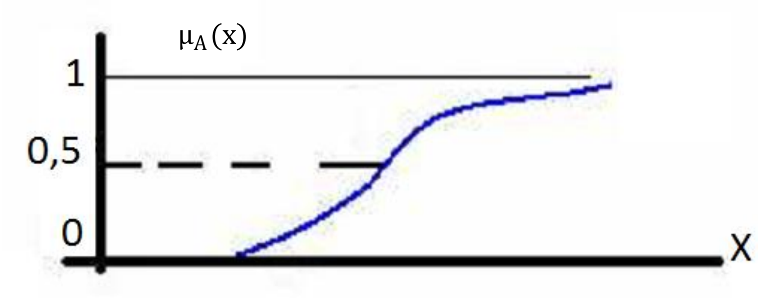


Figura 4: Pertenencia

DEFINICIONES EN $\mu(x)$ DIFUSA

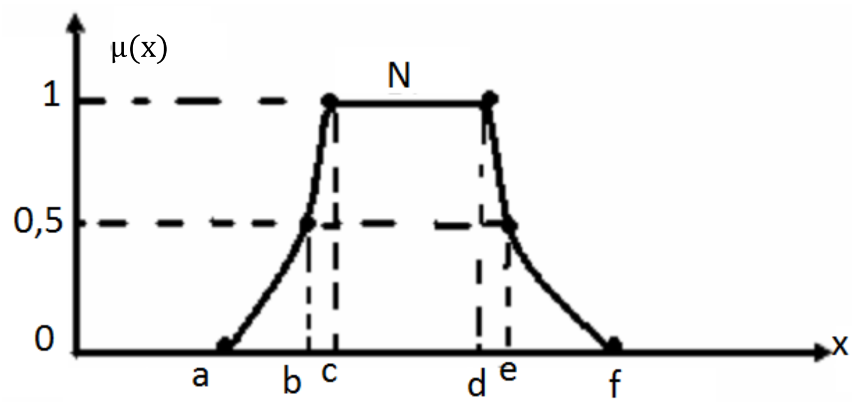


Figura 5: Definiciones en $\mu(x)$

a) $\mu(x)$ es normalizada si $\mu(x)_{max} = 1$. Sí, por ejemplo, la velocidad máxima de un motor es de 1500 [rpm], los valores reales de velocidad se dividen por 1500. Siempre se considera $\mu(x)$ normalizada
b) soporte compacto es el intervalo de valores de x para los cuales $\mu_A(x) > 0$. En la figura 5 sería el intervalo af.
c) Núcleo (N). Es el conjunto de x tales que $\mu_A(x) = 1$. Es el intervalo cd en la figura 5.
d) Cruces. Son los x para los cuales $\mu_A(x)$ =0.5. Son los puntos b y e en la figura 5.
e) Anchura de banda (B). Es el intervalo de x entre los puntos de cruce. Es el intervalo B = e-b en la figura 5
f) Cortes α son los conjuntos difusos tales que $\mu_A(x) \geq \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Un conjunto difuso puede ser expresado como una superposición de estos cortes α.

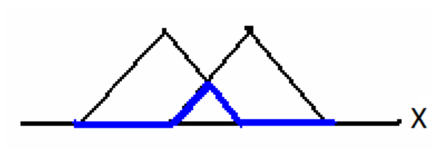
OPERACIONES BÁSICAS SOBRE CONJUNTOS DIFUSOS

Se definen en base a las funciones de pertenencia: $\vee$ unión; $\wedge$ intersección, max = “el mayor de”; min = “el menor de”.

Entonces

$$1.\ \mu_{A\vee B} \equiv \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

$$2.\ \mu_{A\wedge B} \equiv min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$



$$3.\ \mu_{\bar{A}}(x) \equiv 1 - \mu_A(x)$$

Son posibles otras formas

Ejemplo. Se ofrecen trabajos A, B, C con los siguientes valoraciones como pertenencias de lógica difusa.

	A	*B*	*C*
Interés profesional	0,2	0,5	0,6
Sueldo	0,4	0,6	0,7
Interes $\wedge$ sueldo	0,2	0,5	0,6

Convendría elegir el trabajo *C.*

Notación de Zadeh

$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu(x_i)}{x_i} \qquad\qquad A = \int_x \frac{\mu(x)}{x}$$

Denotan $A = \{x;\ \mu(x)\}$.

¡No son sumas, ni cuocientes ni integración!

Ejemplo:

$$A = \frac{0{,}3}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0{,}6}{3}$$

$$B = \frac{0}{1} + \frac{0{,}5}{2} + \frac{0{,}7}{3}$$

$$A \vee B = (mayor\ de\ ) = \frac{0{,}3}{1} + \frac{0{,}5}{2} + \frac{0{,}7}{3}$$

$$A \wedge B = (menor\ de\ ) = \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0{,}6}{3}$$

$$\bar{A} = (1 - \mu_A) = \frac{0{,}7}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0{,}4}{3}$$

<u>ALGUNOS TIPOS DE FUNCIONES DE PERTENENCIA, DIFUSA.</u>

1. <u>Triangular.</u>

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{m-a}, & x \in [a,m] \\ \dfrac{b-x}{b-m}, & x \in [m,b] \\ 0, & x \geq b \end{cases}$$

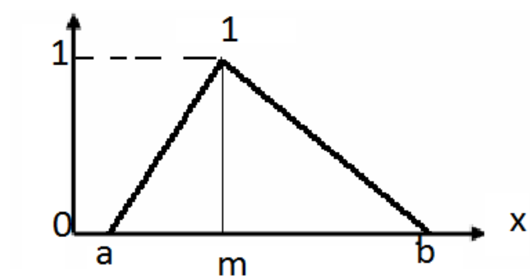


Figura 6: función triangular

2. <u>Γ, gamma Tipo 1.</u>

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1 - e^{-k(x-a)^2}, & x > a, k > 0 \end{cases}$$
$$e = 2{,}718$$

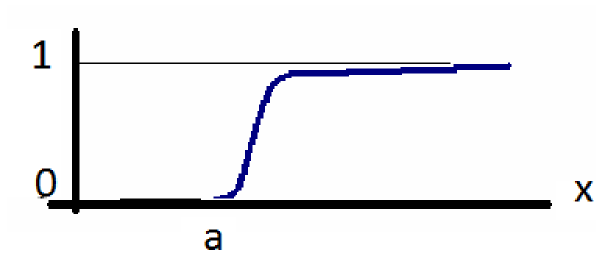


Figura 7: función Γ, gamma Tipo 1

3. Trapezoidal, tipo 1

$$\begin{cases} 0, & si\ x < a \\ \dfrac{x-a}{m-a}, & x \in [a,m] \\ 1, & x \in [m,n] \\ \dfrac{b-x}{b-n} & x \in [n,b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

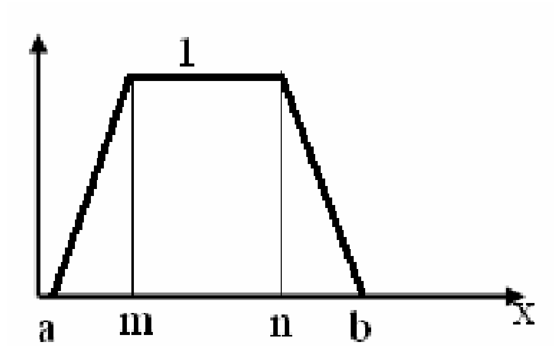


Figura 8: función trapezoidal

4. Gaussiana

$$\mu(x) = e^{-k(x-m)^2}, k > 0$$

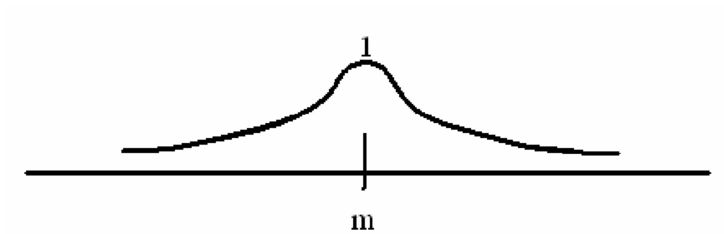


Figura 9: función tipo Gaussiana

Área no tiene que ser 1, como en probabilidades.

5. Exponencial, tipo 1

$$\mu(x) = \frac{1}{1 + k(x-m)^2}, k > 1$$

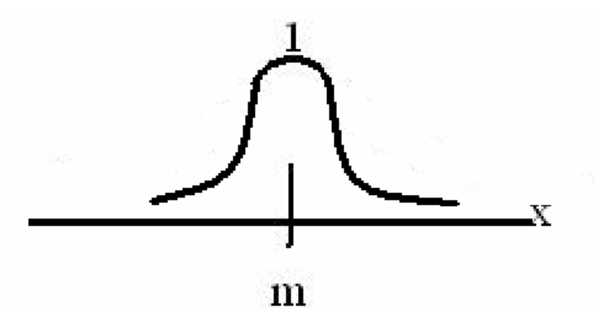


Figura 10: función tipo Exponencial

OTRAS OPERACIONES EN CONJUNTOS

$A \supset B: \mu_A(x) > \mu_B(x), \forall x \in U$

$A = B: A \supset B \wedge\ B \supset A; O\ b\acute{\imath}en\ \mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in U$

$A \vee A = A;\ A \wedge A = A$

$A \vee B = B \vee A;\ A \wedge B = B \wedge A$

$A \cup U = U;\ A \wedge U = A;\ \ A \vee \emptyset = A;\ \ A \wedge \emptyset = \emptyset;$

$\overline{(\bar{A}\,)} = A;\ \ \overline{(A \vee B)} =\ \bar{A} \wedge \bar{B};\ \ \overline{(A \wedge B)} =\ \bar{A} \vee \bar{B}$

No rige la complementaridad de G. Cantor en conjuntos difusos. Es decir:
$A \vee \bar{A} \neq U\ ;\ \ A \cap \bar{A} \neq \emptyset$

VARIABLES LINGUISTICAS (VL)

Son familias de conjuntos de la forma (gramática) siguiente:

VL = {x, T(x), U, G, M }

x: nombre de la variable (velocidad, temperatura,…)

T(x): conjunto de términos (alto, bajo, …)

U: universo

G: regla sintáctica para generar nombres de valores de x

M: regla semántica asociadora

En los ejemplos se usarán términos en inglés por facilidad con libros y artículos de revistas.

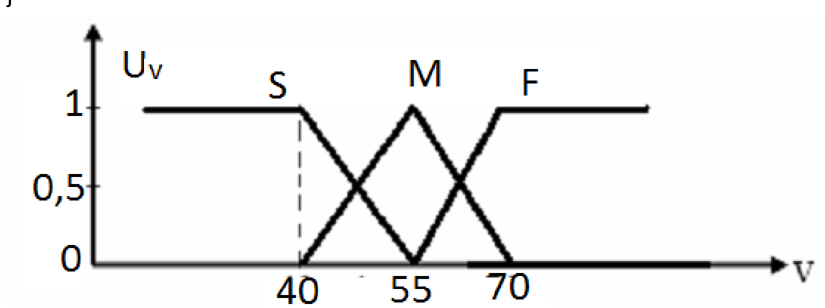
Ejemplo :

x, velocidad v
T(velocidad) = { S, M, F, VS, VF,..} = {lento, medio, rápido, muy lento, muy rápido} = {slow, moderate, fast, very slow,very fast….}
Cada término en T es caracterizado por un conjunto difuso (FS) en U.

Ejemplo :

S, velocidad menor que 40 [Km/h]; M, velocidad cerca de 55 [Km/hr]; F, velocidad mayor que 70 [Km/h].
Los conjuntos difusos podrían ser así (usando triángulos y trapecios)

V= {S, M, F}



Una V=50 sería cerca del 20% S y cerca del 70 % M

DOS REGLAS DE INFERENCIA DIFUSAS

Sean P_1, P_2 las premisas (o antecedentes) y C los consecuentes (o consecuencias).

1.- Modus Ponens Generalizado

$P_1: \text{x es A}'$
$P_{2:}\text{Si x es A, y es B}$
$\text{C: y es B}'$

Se reduce a Modus Ponens nítido si

$$A' = A \quad y \quad B' = B$$

2.- Modus Tollens Generalizado

$P_1: \text{y es B}'$
$P_{2:}\text{Si x es A, y es B}$
$\text{C: x es A}'$

Se reduce a Modus Tollens Nítido si $B' = \overline{B}\ (\text{no B})$ y $A' = \overline{A}$

Representan enlaces (de reglas) hacia delante o hacia atrás $A \rightarrow B$, $A \leftarrow B$

Además de reglas IF – THEN se pueden usar representaciones con Redes Semánticas o con Marcos.

CARACTERISTICAS DE LOS CONJUNTOS DIFUSOS

- Extienden la teoría de conjuntos usuales a clases de conjuntos con fronteras imprecisas
- Permiten considerar vaguedad, ambigüedad, incerteza, ambivalencia
- Reconcilian la precisión de las matemáticas con la imprecisión del mundo real.
- Permiten considerar bordes borrosos, restricciones suaves, información ambigua.
- Permiten describir y modelar fenómenos complejos o imprecisos (tales como: no-linealidades, multilazos, sistemas tempovariantes, parámetros variables en t).
- Trabajan con un espacio grande de soluciones
- Son de gran simplicidad
- Permiten paralelismo
- Pueden aproximar cualquier mapa o función continua
- Por el principio de extensión, se pueden extender teoremas de conjuntos usuales a conjuntos difusos, con ciertas precauciones.

ESQUEMA DE CONTROLADOR CON LOGICA FUZZI

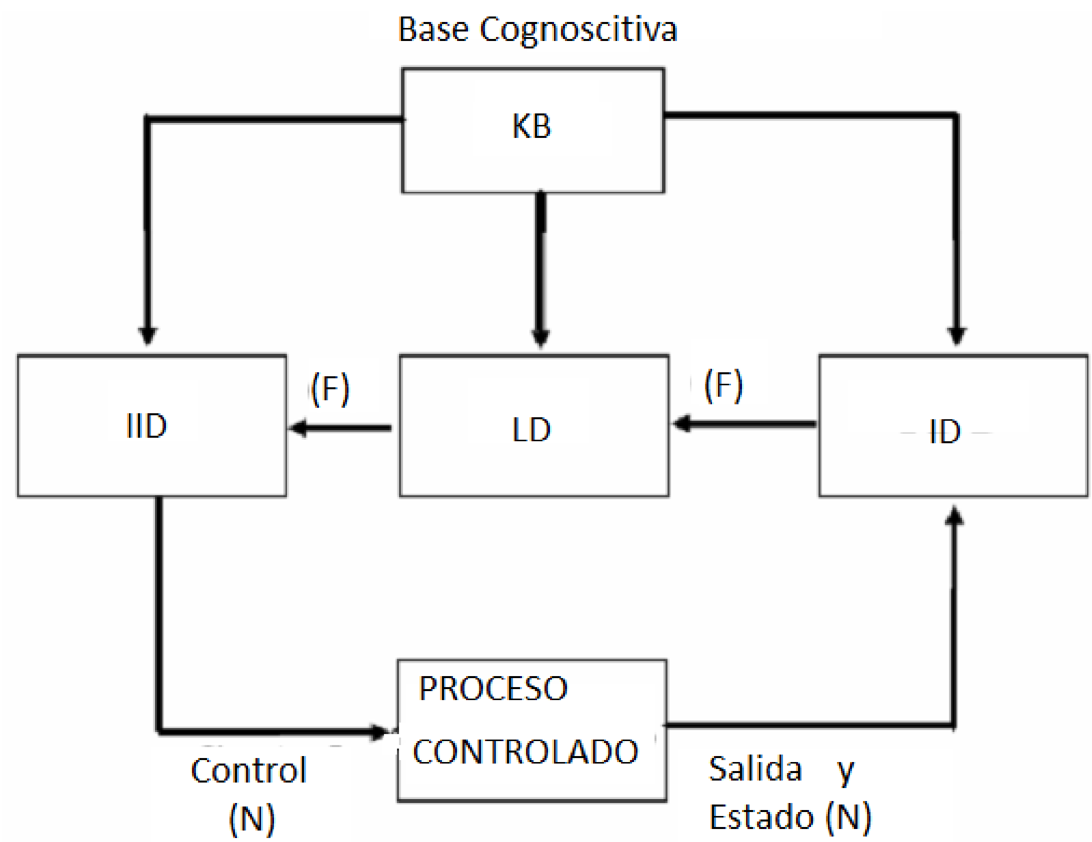


Figura 11: Esquema de controlador con lógica difusa

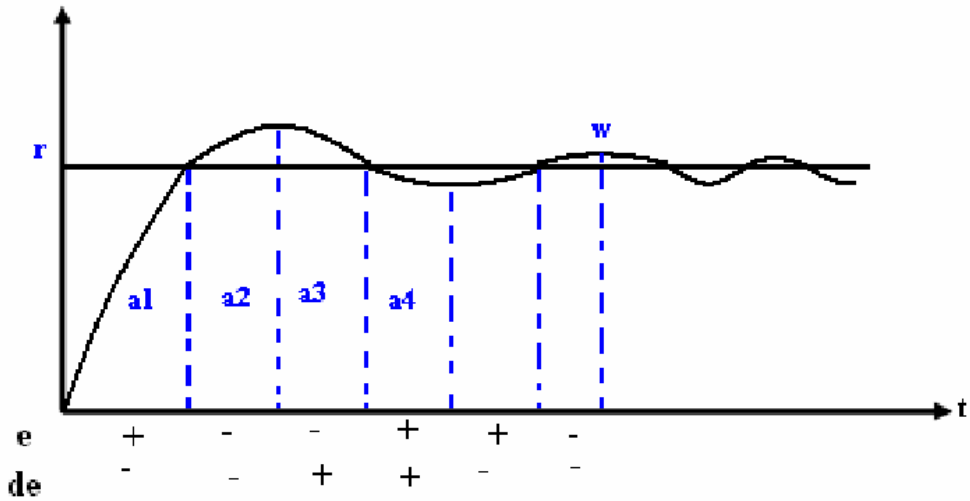
KB	Base de datos y base de control lingüística (ej. Reglas IF..THEN)
LD	Lógica decisional (simulador de decisiones humanas) Kernel
ID	Interfaz difusificadora
IDD	Interfaz desdifusificadora
(F)	Señales difusas (lingüísticas)
(N)	Señales nítidas (análogas o digitales usuales)
IDD	Opera según el centro de gravedad (centroide), o según otro método, como media máxima, momentos, etc.

CONTROL DIFUSO DE MOTOR DE CC

Reglas de control:

$$e(k) = r(k) - w(k) \qquad\qquad w = velocidad$$

$$de(k) = e(k) - e(k-1)$$



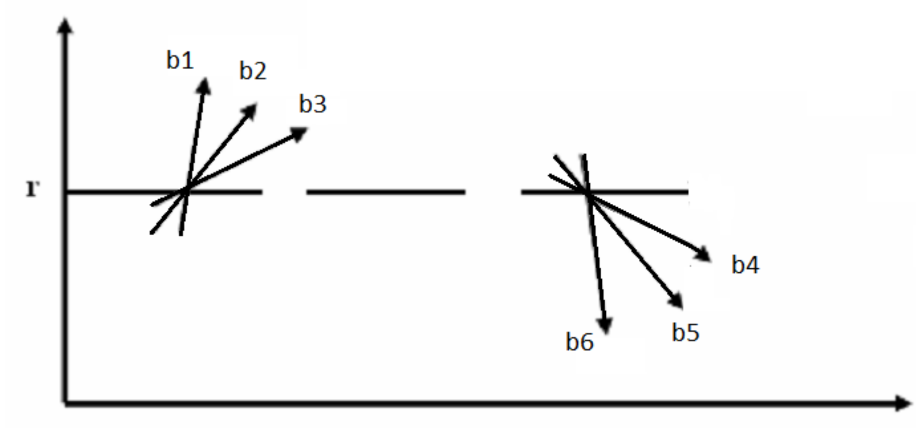
A) Ver zonas generales.

$\mathrm{a}_1\!:\{e > 0\,, de\ < 0\}$

etc

$\mathrm{a}_4\!:\{e > 0\,, de\ < 0\}$

B) Además, ver casos donde e = 0



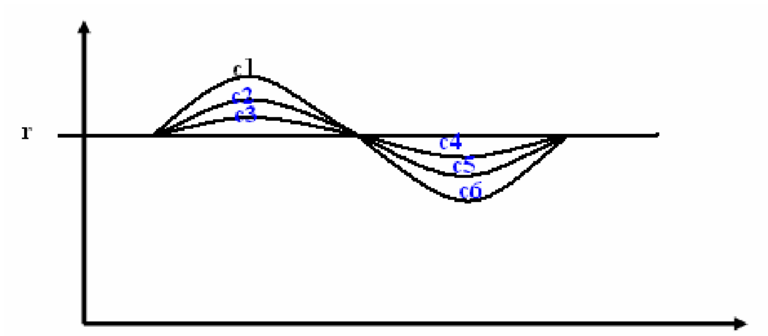
$b_1\!:\{e = 0\,, de \lll 0\}$; de muy menor que 0

$b_1\!:\{e = 0\,, de << 0\}$; de bastante menor que 0

$b_1\!:\{e = 0\,, de < 0\}$; de menor que 0

En forma similar $b_4, b_5, b_6\ , con, >, >>, \ggg\ 0$, respectivamente

C) Casos en que de=0



$c_1\colon\{de = 0, e <<< 0\}$

Etc.

PLANO ESTADO

de(k) ↑ / → e(k)

	NB	NM	NS	ZE	PS	PM	PB
NB				.b1			
NM		.a2		.b2		.a1	
NS				.b3			
ZE	.c6	.c5	.c4	ZE	.c3	.c2	.c1
PS				.b4			
PM		.a3		.b5		.a4	
PB				.b6			

N, negativo; P, positivo; B, grande; M,mediano; S, pequeño; ZE=cero

Ejercicio: completar el cuadro.

REGLAS DE CONTROL

IF($e = A_i$) AND($de = B_i$)… THEN (du=C_i)

de(k) ↑ / → e(k)

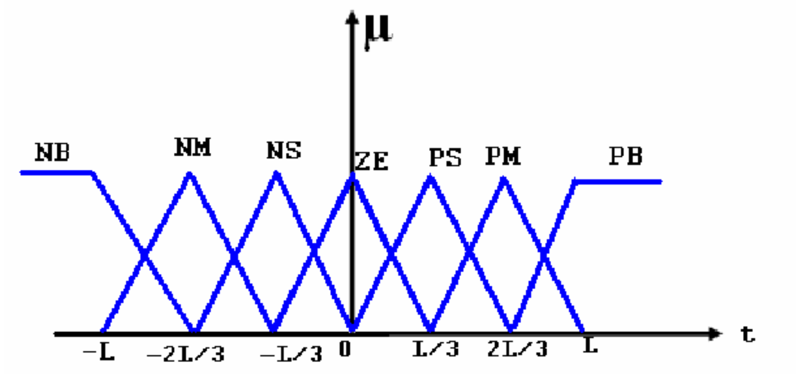
	NB	NM	NS	ZE	PS	PM	PB
NB	**PB**	**PB**	**PB**	**PB**	**PM**	**PS**	**ZE**
NM							
NS							
ZE				**ZE**			
PS						**NM**	
PM	**PS**						
PB	**ZE**						

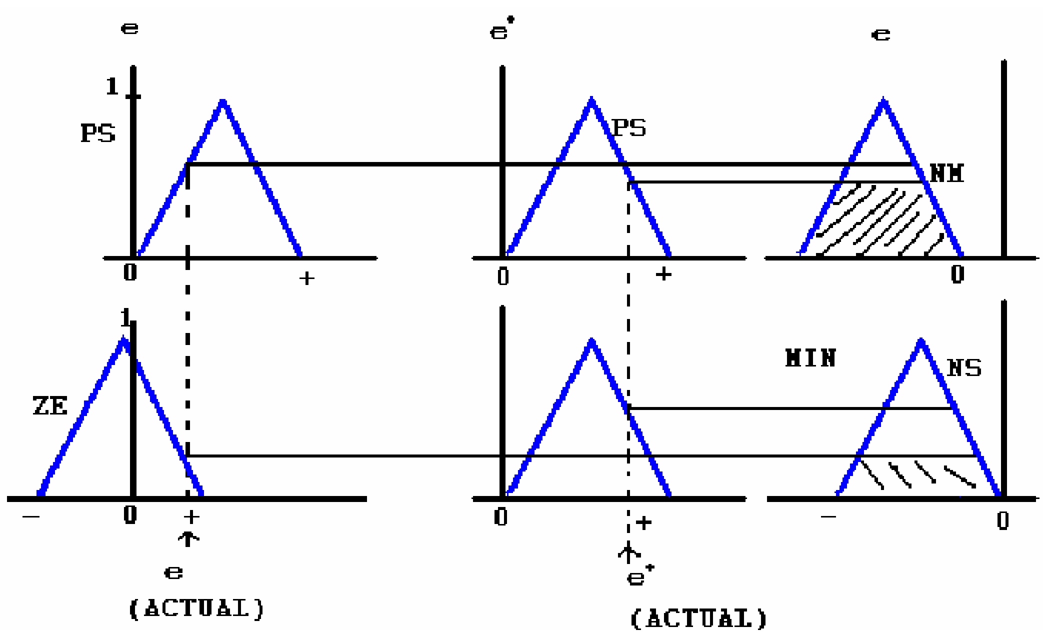
Ejercicio: completar el cuadro.

Las 49 reglas se pueden reagrupar en 7 si hay dos reglas que dan el mismo valor para du.

$\mathrm{IF}(\mathrm{e} = \mathrm{A_i} \quad \mathrm{OR} \quad \mathrm{e} = \mathrm{A_{i'}}) \quad \mathrm{AND} \quad (\mathrm{de} = \mathrm{B_i} \quad \mathrm{OR} \quad \mathrm{de} = \mathrm{B_{i'}}) \ldots$
$\quad \mathrm{THEN}\ (\mathrm{du} = \mathrm{C_i})$

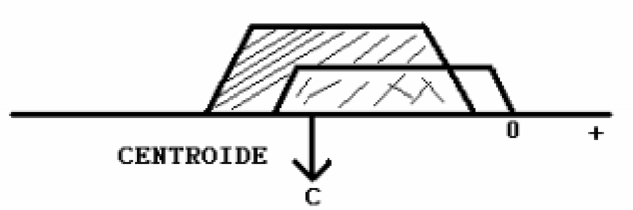
μ de pertenencia





$R_1 = ePS \wedge \dot{e}PS \rightarrow c\ NM$

$R_2 = eZE \wedge \dot{e}PS \rightarrow c\ NS$



DESDIFUSICACIÓN

Paso de difuso a nítido (análogo y digital)
Por Media, máxima modificada, momentos,…
El control se obtiene como

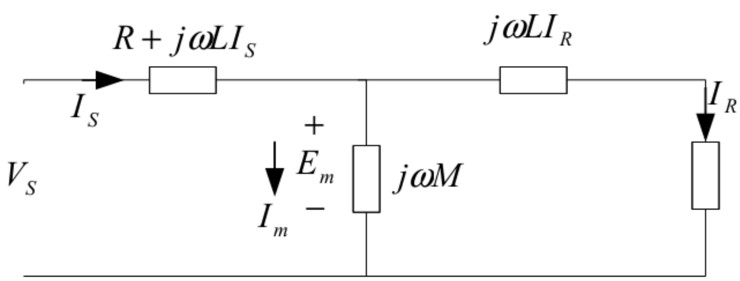
$$u(k) = u(k-1) + Gdu(k-1)$$

$$G = \text{Ganancia del Contrólador}$$

CONTROL DIFUSO DE UN MOTOR DE INDUCCIÓN

El motor es un sistema dinámico no-lineal y tempovariante.

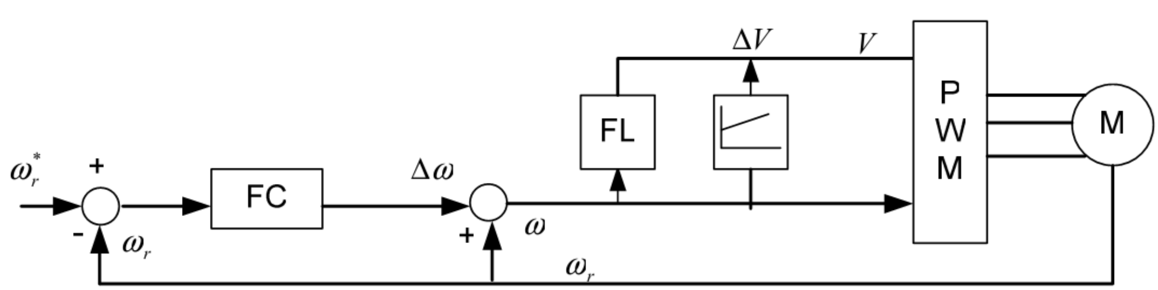
Circuito equivalente por fase.



$$E_M = jM\omega I_m ;\ \phi = MI_m \approx \frac{E_m}{\omega} = \frac{Vs}{2 \cdot \pi \cdot f}$$

Interesa (en caso) alimentar con (voltaje/frecuencia) constante ω = 2 π f. Se desprecia $R + j\omega\ LI_S$, pero en bajas velocidades la caída en R afecta mucho.

Esquema:



Δ ω de desplazamiento.

ω_r, ω de rotor.

ω, ω de estator.

FC: Controlador Difuso; FL: Lógica difusa, PWM, inversor

Ejemplo de Reglas:

$$V = K\omega_e + \Delta V$$

Regla 1	$si \|\omega\| \text{ es PB(Positive Big)}, \Delta V = 0$
Regla 2	$si \|\omega\| \text{ es PM}, \Delta V, PS$
Regla 3	$\|\omega\| \ PS \rightarrow \Delta V, \ PM$
Regla 4	$\|\omega\| \ ZE \rightarrow \Delta\omega, \ PB$

No se requiere medir Is

$$J\dot{\omega}_r = T_{em} - B\omega_r - T_L$$

T_{em} = momento desarrollado por el motor

$B\omega_r$ = momento de roce o fricción

T_L= momento útil en la carga

Si T_{em} es considerado constante, por ejemplo a 1,5 del valor T_N, nominal, y se desprecian $B\omega_r$ y T_L de la carga.

$$J\Delta\omega_r = 1{,}5T_N\Delta t$$

Si ω_r^*, velocidad angular deseada se considera constante y se define el error e de velocidad = $\omega_r^* - \omega_r$ se obtiene.

$$\Delta e(k) = e(k) - e(k-1) = \omega_r(k-1) - \omega_r(k) = -\Delta\omega_r$$

Los autores Caminhas et al suponen un motor de 2 HP, J= 0,016 [Kgm^2] , T_N= 8,5[Nm], $\Delta t = 500$ [µs] , error en [-0,4; 0,4], un deslizamiento máximo de velocidad de 30[rad/seg]. Esto da un inverso de [-30; 30]. Las variables se discretizan en 25 puntos, no homogéneos. El paso de integración es de 50[µs].